Für mehr Problemlösen im Mathematikunterricht – Entwicklung und Optimierung einer Online-Fortbildung mit individuellen Nutzungsmöglichkeiten

Online-Supplement: Auszüge aus der Materialunterstützung des zweiten Fortbildungskapitels („Problemlösestrategien“)

Karina Demmler[1,*], Marita Friesen[2], Lars Holzäpfel[1], Timo Leuders[1] & Anika Dreher[1]

[1] *Pädagogische Hochschule Freiburg*
2 Pädagogische Hochschule Heidelberg
[*] *Kontakt: Pädagogische Hochschule Freiburg, Institut für Mathematische Bildung, Kunzenweg 21, 79117 Freiburg*
Mail: karina.demmler@ph-freiburg.de

Zitationshinweis:
Demmler, K., Friesen, M., Holzäpfel, L., Leuders, T. & Dreher, A. (2024). Für mehr Problemlösen im Mathematikunterricht – Entwicklung und Optimierung einer Online-Fortbildung mit individuellen Nutzungsmöglichkeiten [Online-Supplement: Auszüge aus der Materialunterstützung des zweiten Fortbildungskapitels („Problemlösestrategien“)]. *HLZ – Herausforderung Lehrer*innenbildung, 7* (1), 300–319. https://doi.org/10.11576/hlz-6591

Eingereicht: 05.07.2023 / Angenommen: 03.05.2024 / Online verfügbar: 04.07.2024

ISSN: 2625–0675

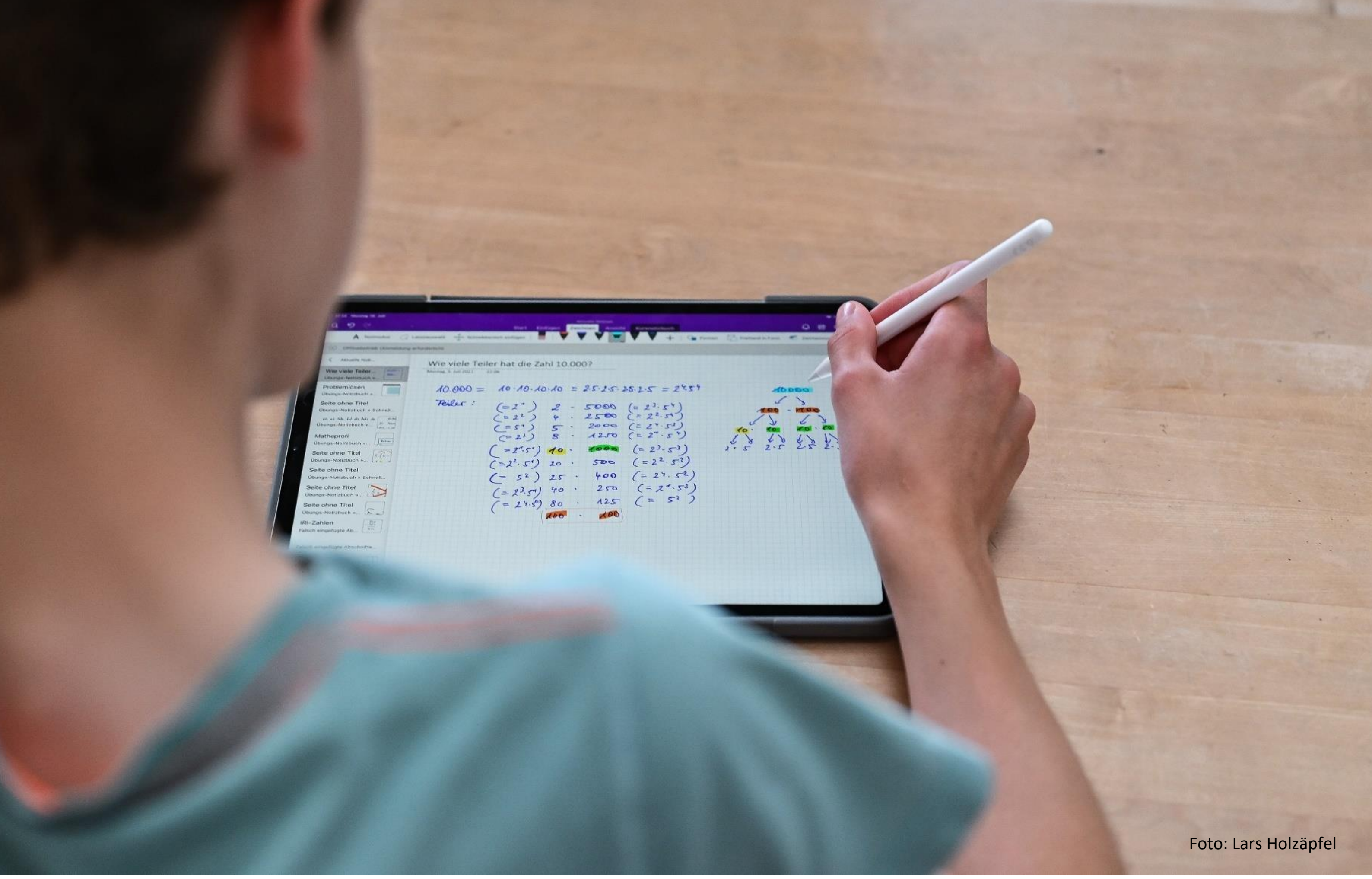


Foto: Lars Holzäpfel

Materialpaket 2

Alle Problemlöse-aufgaben sind in der Praxis mehrfach erprobt!

Sammlung und Kurzbeschreibungen von Problemen für verschiedene Klassenstufen der Sekundarstufe 1

Projekt ANNUM-Pro, DZLM/IPN

Institut für Mathematische Bildung (IMBF), PH Freiburg

Inhalt

ab Klasse 5/6:

- Problem: Big Choc
- Problem: Brunnen

ab Kasse 7/8:

- Problem: Händeschütteln
- Problem: Schokoladenumformungen

ab Klasse 9/10:

- Problem: Verpackung
- Problem: Funktion

klassenübergreifend:

- Problem: Kino
- Problem: Teiler der Zahl 10 000

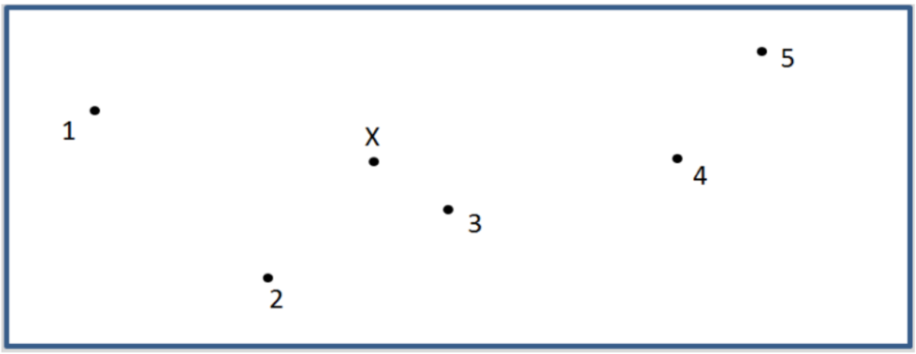
Hinweis:

Diese Version zeigt Auszüge aus dem Materialpaket 2. Es werden Ausschnitte der Seiten zu den exemplarischen Problemen „Brunnen", „Funktion" und „Teiler der Zahl 10 000" präsentiert.

Problem: Brunnen

Die Karte zeigt ein Stück Land. Es gibt fünf Brunnen in diesem Gebiet. Stelle dir vor, du stehst bei X mit einer Herde von Schafen, die Durst haben. Zu welchem Brunnen gehst du?

Die Wahl war natürlich nicht schwierig. Du gehst zum nächstgelegenen Brunnen. Entwickle eine Einteilung des Landes in fünf Gebiete, sodass zu jedem Ort in einem Gebiet der Brunnen in diesem Gebiet der nächstgelegene ist.



Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln*. Cornelsen SCRIPTOR, S. 33, zuerst veröffentlicht bei Goddijn und Reuter, 1995.

Didaktischer Kommentar

Einordnung

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz: (nach KMK-Bildungsstandards)	Leitidee Messen: Die Schüler*innen „nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-,Flächen- und Volumenmessung“. (KMK, 2003, S. 10)

Wie muss das Vorwissen eines/r Lernenden sein, damit das Problemlöse-Potential der Aufgabe genutzt werden kann?

Notwendiges Vorwissen:	kaum Vorwissen notwendig, lediglich Problemstellung sollte für Lernende altersgemäß formuliert sein
„Zu viel“ Vorwissen:	Begriff und Konstruktion der Mittelsenkrechten sind bekannt

Problem: Brunnen

Schüler*innenlösungen

Beispielhafte Strategien

Was ist das Besondere an diesem Problem?

→ Es lässt eine besonders hohe Bandbreite an intuitiven Strategien zu.

Schüler*innenlösungsansatz 1:

Beispiele erzeugen und prüfen

systematisch probieren

… da die Vorgehensweise zwar als „zufällig“ bzw. unsystematisch beschrieben wird, dennoch aber ein System hinter dem Vorgehen liegt.

probieren und prüfen

… da jeder bewusst zufällig gesetzte Punkt als Orientierung dient, das jeweilige Gebiet weiter einzugrenzen.

Schrittweise vorgehen

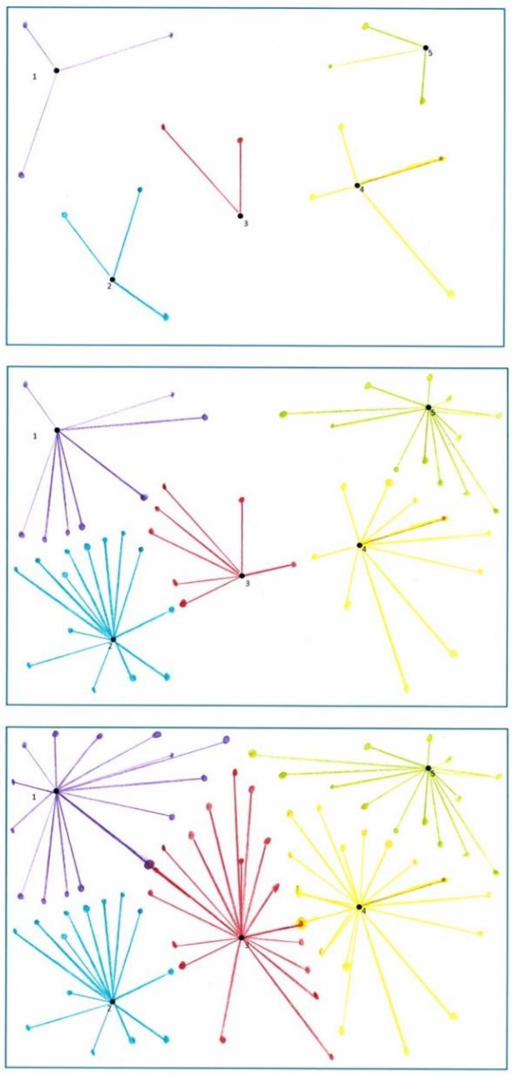
vorwärts denken

… da Schritt für Schritt versucht wird, die Lösung zu erreichen. Im ersten Schritt wurde geschaut, ob die Lösung des Problems evtl. offensichtlich ist. So wurde direkt zu Beginn versucht, alle fünf Brunnen zu erreichen.
Im zweiten Schritt werden mehr Punkte gesetzt, weil immer noch nicht deutlich erkennbar ist, wie sich die Gebiete abzeichnen. Im dritten Schritt wurden dann so viele Punkte gewählt, um dann eine Hypothese aufstellen zu können.

3 Momentaufnahmen aus dem Verlauf der Entstehung (sukzessive werden immer mehr Beispiele erzeugt):

Kommentar bei der ersten Bearbeitung:

Ich habe die Augen zu gemacht und irgendwo ein Kreuz gemacht und geguckt, welcher Brunnen der nächste ist.



Holzäpfel, L., Rott, B. & Dreher, U. (2016). Exploring Perpendicular Bisectors: The Water Well Problem. In T. Cadez, A. Kuzle & B. Rott (Hrsg.), *Practical Ideas for Problem Solving in the Mathematics Classroom – Experiences from Different Countries* (S. 117-130). WTM.

Problem: Brunnen

Schüler*innenlösungsansatz 3:

Ein einfacheres Problem lösen

eine allgemeinere Situation betrachten

… da im ersten Schritt angenommen wird, dass es sich um fünf kongruente Gebiete handeln würde.

(1) Ausgangspunkt (vermutlich in Anlehnung an das Bruchrechnen): Gleichverteilung der Gebiete;
(2) dann Erkenntnis, dass andere Einteilung zu kürzeren Entfernungen führt;
(**3**) anschließend sukzessive „Reparatur“ der Ausgangsidee hin zu einer Gebietseinteilung, bei der…

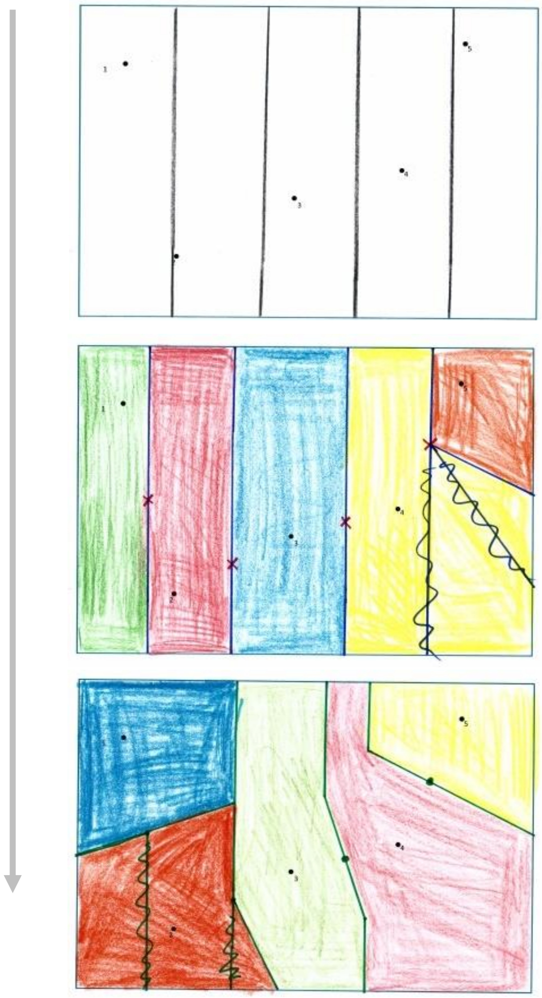
Lösen über Annäherung und Lösung verbessern

… da aus der Annahme heraus, dass es fünf gleich große Gebiete sind, die erste Skizze nach und nach an die Problemsituation bzw. Bedingungen des Problems angepasst und somit optimiert wurde.

3 Momentaufnahmen aus dem Verlauf der Entstehung:

Kommentar bei der ersten Bearbeitung:

Ich teile erstmal alle Gebiete gleich groß ein.



Holzäpfel, L., Rott, B. & Dreher, U. (2016). Exploring Perpendicular Bisectors: The Water Well Problem. In T. Cadez, A. Kuzle & B. Rott (Hrsg.), *Practical Ideas for Problem Solving in the Mathematics Classroom – Experiences from Different Countries* (S. 117-130) WTM.

Problem: Brunnen

Schüler*innenlösungansatz 4:

Ein einfacheres Problem lösen

Lösen über Annäherung und Lösung verbessern

… da die erste grobe Einteilung zur Idee führt, dass man alles feiner darstellen kann.

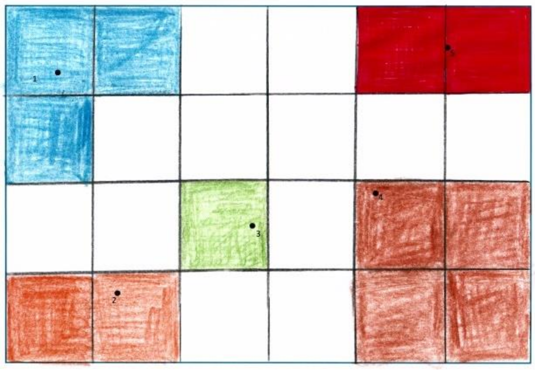
Leitfrage: Wie weit kann man an den Rand des Möglichen gehen?

Schrittweise vorgehen

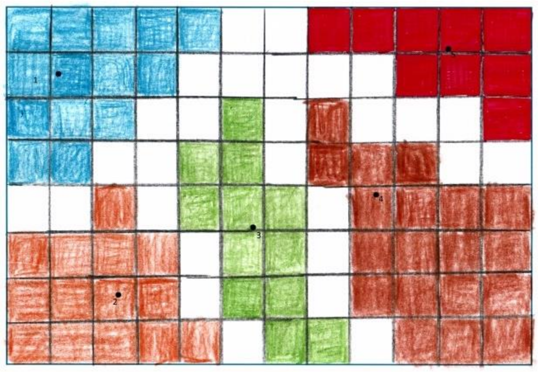
vorwärts denken

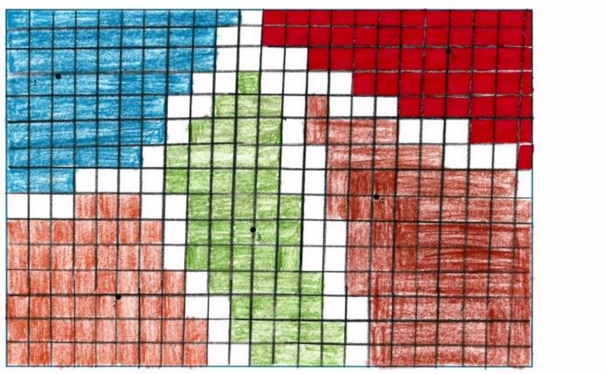
… da Schritt für Schritt - ausgehend von einer groben Einteilung - eine Verfeinerung vorgenommen wird.

3 Momentaufnahmen aus dem Verlauf der Entstehung:



Hier habe ich mich gefragt, wie weit ich über den Rand für das Gebiet hinausgehen kann.

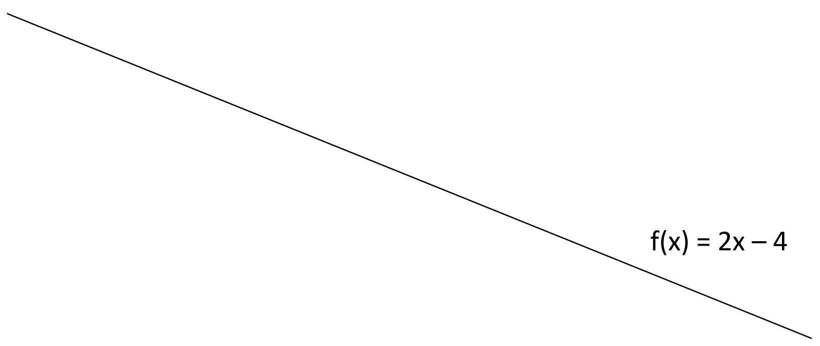




Holzäpfel, L., Rott, B. & Dreher, U. (2016). Exploring Perpendicular Bisectors: The Water Well Problem. In T. Cadez, A. Kuzle & B. Rott (Hrsg.), *Practical Ideas for Problem Solving in the Mathematics Classroom – Experiences from Different Countries* (S. 117-130). WTM.

Problem: Funktion

Zeichne ein passendes Koordinatensystem zum gegebenen Graphen mit der Gleichung: f(x) = 2x – 4



Didaktischer Kommentar

Einordnung

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz: (nach KMK-Bildungsstandards)	Leitidee Funktionaler Zusammenhang: Die Schüler*innen „analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (linear, proportional) (KMK, 2003, S. 11)

Wie muss das Vorwissen eines/r Lernenden sein, damit das Problemlöse-Potential der Aufgabe genutzt werden kann?

Notwendiges Vorwissen:	Bedeutung der Steigung, des Steigungsdreiecks und des y-Achsenabschnitts kennen,
„Zu viel“ Vorwissen:	Problem dieser Art wurde bereits gelöst

Problem: Funktion

Schüler*innenlösungsansatz 2:

Ein einfacheres Problem lösen

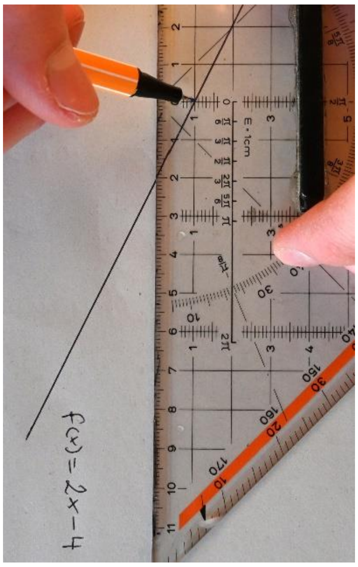
in Teilproblem zerlegen

… da zunächst nur das Steigungsdreieck fokussiert wird; hier Nutzung des Geodreiecks als Hilfsmittel (gelbes Dreieck wurde zur Veranschaulichung und Erläuterung zusätzlich erstellt).

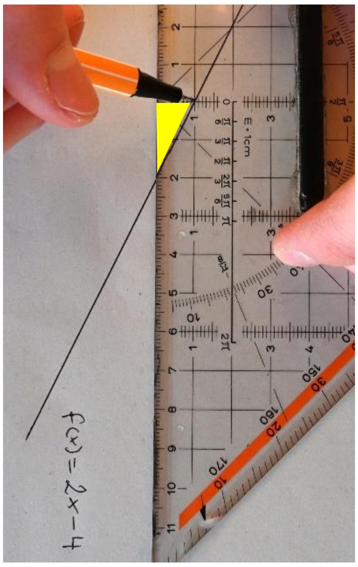
Etwas Bekanntes nutzen

auf etwas Bekanntes zurückführen

… da aus vorherigen Aufgabenbearbeitungen das Abmessen des Steigungsdreiecks bekannt war und jetzt als Ausgangspunkt genutzt wird. Somit kann die Ausrichtung der Koordinatenachsen erkannt werden.



Ich lege das Geodreieck so an, dass die Linien mein Steigungsdreieck darstellen.



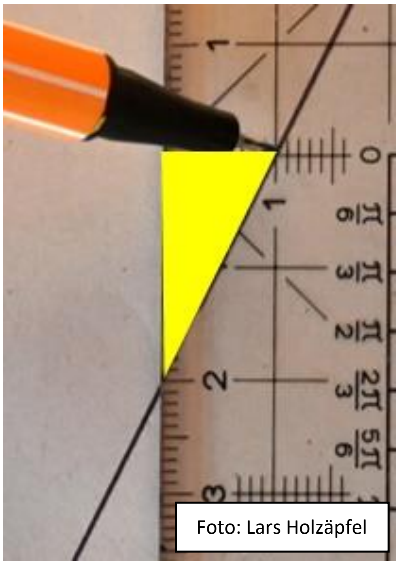


Foto: Lars Holzäpfel

Problem: Funktion

Schüler*innenlösungsansatz 3:

Etwas Bekanntes nutzen

ein ähnliches gelöstes Problem nutzen

… da bereits von anderen (Problem-)Situationen bekannt ist, dass beim Halten gegen das Licht etwas Durchgesehen werden kann.

Vorgehen: Koordinatensystem auf ein anderes Blatt zeichnen, gegen das Licht halten und dann ausrichten.

Ich habe mir ein Koordinatensystem auf ein anderes Blatt gezeichnet und mir etwas gesucht, damit ich es durchsehen kann.

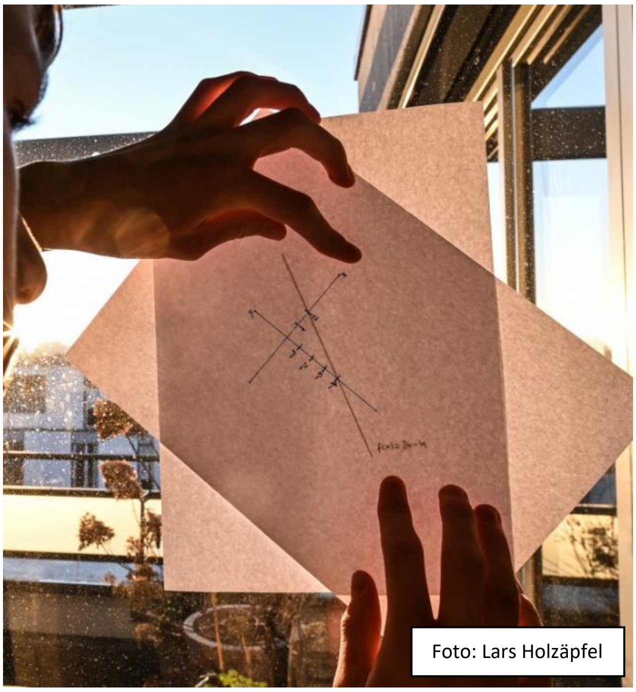


Foto: Lars Holzäpfel

Problem: Funktion

Schüler*innenlösungsansatz 4:

Etwas Bekanntes nutzen

auf Etwas Bekanntes zurückführen

… da das Steigungsdreieck hier als Hilfsmittel (Messinstrument) genutzt wird. Damit kann die Ausrichtung der Koordinatenachsen herausgefunden werden.
Im letzten Schritt wird eine Verschiebung der x-Achse so vorgenommen, dass der Schnittpunkt auf der y-Achse bei -4 entsteht.

Ich habe mir mein Steigungsdreieck ausgeschnitten – das ging ganz gut mit der Blattecke. Dann kann ich es an die Funktion legen.

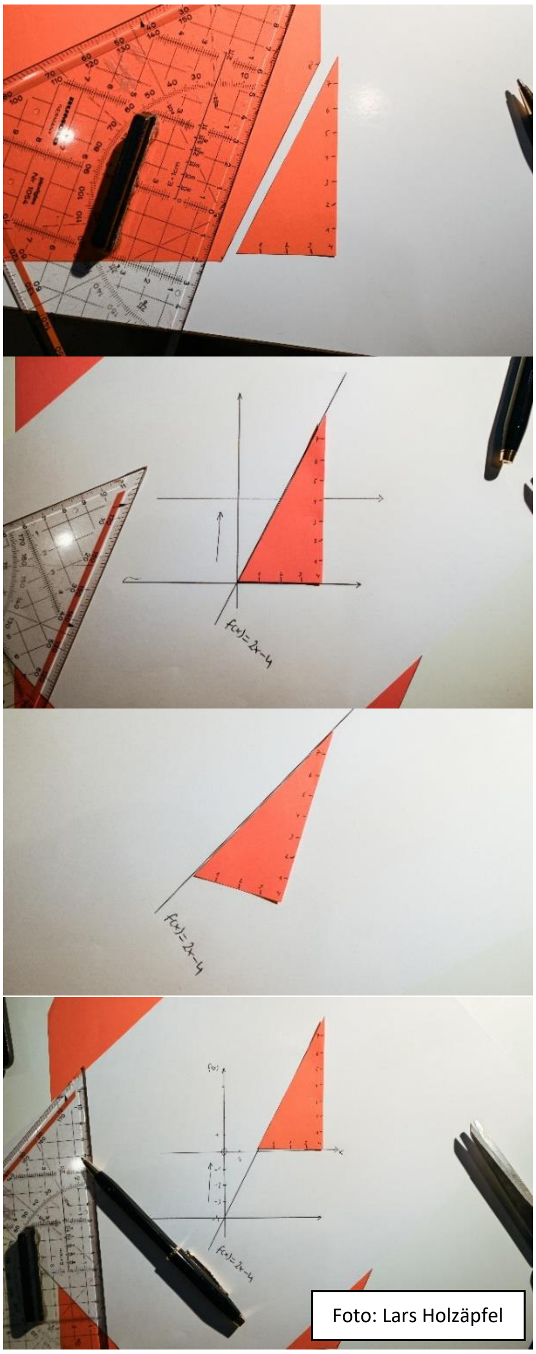


Foto: Lars Holzäpfel

Problem: Teiler der Zahl 10 000

(1) Wie lautet die Primfaktorzerlegung von 10000?
(2) Wie viele Teiler hat die Zahl 10000?

Holzäpfel, L., Lacher, M. Leuders, T. & Rott, B. (2018). *Problemlösen lehren lernen*. Klett Kallmeyer, S. 51.

Didaktischer Kommentar

Einordnung

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz: (nach KMK-Bildungsstandards)	Leitidee Zahl: Die Schüler*innen „führen in konkreten Situationen kombinatorische Überlegungen durch, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen" (KMK, 2003, S. 10)

Wie muss das Vorwissen eines/r Lernenden sein, damit das Problemlöse-Potential der Aufgabe genutzt werden kann?

(in den einzelnen Teilaufgaben):

(1) Notwendiges Vorwissen:	Begriffsverständnis von Primzahlen
„Zu viel" Vorwissen:	Beherrschung eines Algorithmus der sukzessiven Prüfung steigender Primzahlen beherrschen (z. B. $100 = 2 \cdot 50 = 2 \cdot 2 \cdot 25 = = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$)
(2) Notwendiges Vorwissen:	Begriffsverständnis von Primzahlen und Teilern
„Zu viel" Vorwissen:	Systematische Durchführung bzw. Formelwissen (Teileranzahl bestimmen)

Schüler*innenlösungen

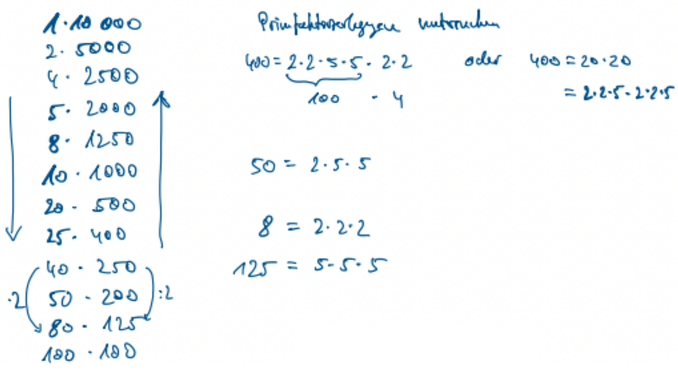
Beispielhafte Strategien

Problem: Teiler der Zahl 10 000

Beispiele erzeugen und prüfen

Beispiele sortieren

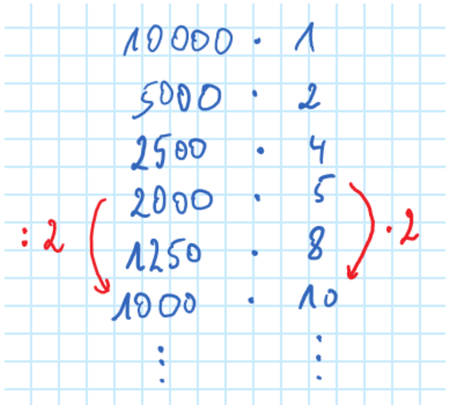
… da die einzelnen Beispiele systematisch angeordnet werden und somit Lücken entdeckt werden können; auch die paarweise Nennung der Teiler wird hier deutlich.



Etwas Bekanntes nutzen

auf etwas Bekanntes zurückführen

Das systematische Generieren weiterer Lösungen durch die Nutzung der Proportionalitätstabelle ist hier hilfreich.



Das Problem anders darstellen

eine andere Darstellung suchen (Grafik)

… da in der Auflistung die Zusammenhänge visualisiert werden.